Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 40

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

14 de mayo de 2020

1. Demostrar $[G^{\mu\nu}, G^{\rho\sigma}]$

Usando que

$$G^{\mu\nu} = i\frac{\gamma^\mu\gamma^\nu}{2} \tag{1}$$

Queremos demostrar que el conmutador es

$$[G^{\mu\nu}, G^{\rho\sigma}] = i\left(g^{\nu\rho}G^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}G^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}G^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}G^{\nu\rho}\right) \tag{2}$$

Para $\mu \neq \nu$ y $\rho \neq \sigma$. Empecemos primero con un caso particular:

$$\left[G^{01}, G^{01}\right] = -iG^{11} + iG^{00} = \frac{\gamma^1\gamma^1}{2} - \frac{\gamma^0\gamma^0}{2} = -1 \tag{3}$$

Pero esto no es posible, pues el conmutador de una matriz consigo misma siempre tiene que ser cero.

$$[G^{\mu\nu}, G^{\rho\sigma}] = G^{\mu\nu}G^{\rho\sigma} - G^{\rho\sigma}G^{\mu\nu} = \frac{(i\gamma^\mu\gamma^\nu)(i\gamma^\rho\gamma^\sigma)}{4} - \frac{(i\gamma^\rho\gamma^\sigma)(i\gamma^\mu\gamma^\nu)}{4} = \frac{\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma}{4} \tag{4}$$

Sabemos que las matrices de Dirac cumplen la propiedad

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \Longrightarrow \gamma^\mu\gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu \tag{5}$$

Usemos ahora varias veces esta propiedad con el producto $\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu$:

$$\begin{aligned}
\gamma^\rho(\gamma^\sigma\gamma^\mu)\gamma^\nu &= \gamma^\rho(2g^{\sigma\mu} - \gamma^\mu\gamma^\sigma)\gamma^\nu = 2g^{\sigma\mu}\gamma^\rho\gamma^\nu - (\gamma^\rho\gamma^\mu)\gamma^\sigma\gamma^\nu \\
&= 2g^{\sigma\mu}\gamma^\rho\gamma^\nu - (2g^{\mu\rho} - \gamma^\mu\gamma^\rho)\gamma^\sigma\gamma^\nu \\
&= 2g^{\sigma\mu}\gamma^\rho\gamma^\nu - 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma\gamma^\nu + \gamma^\mu\gamma^\rho(\gamma^\sigma\gamma^\nu) \\
&= 2g^{\sigma\mu}\gamma^\rho\gamma^\nu - 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma\gamma^\nu + \gamma^\mu\gamma^\rho(2g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu\gamma^\sigma) \\
&= 2g^{\sigma\mu}\gamma^\rho\gamma^\nu - 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma\gamma^\nu + 2g^{\nu\sigma}\gamma^\mu\gamma^\rho - \gamma^\mu(\gamma^\rho\gamma^\nu)\gamma^\sigma \\
&= 2g^{\sigma\mu}\gamma^\rho\gamma^\nu - 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma\gamma^\nu + 2g^{\nu\sigma}\gamma^\mu\gamma^\rho - \gamma^\mu(2g^{\nu\rho} - \gamma^\nu\gamma^\rho)\gamma^\sigma \\
&= 2g^{\sigma\mu}\gamma^\rho\gamma^\nu - 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma\gamma^\nu + 2g^{\nu\sigma}\gamma^\mu\gamma^\rho - 2g^{\nu\rho}\gamma^\mu\gamma^\sigma + \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma
\end{aligned}$$

Vemos que hemos reordenado los términos para que aparezca el producto $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$ que cancelará el término restando en (4). Sustituyendo en esa ecuación y usando

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = -2iG^{\mu\nu} \tag{6}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
[G^{\mu\nu}, G^{\rho\sigma}] &= -ig^{\mu\sigma}G^{\rho\nu} + ig^{\mu\rho}G^{\sigma\nu} - ig^{\nu\sigma}G^{\mu\rho} + ig^{\nu\rho}G^{\mu\sigma} \\
&= i\left(g^{\nu\rho}G^{\mu\sigma} + g^{\mu\rho}G^{\sigma\nu} - g^{\nu\sigma}G^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}G^{\rho\nu}\right)
\end{aligned}$$

Esta expresión no es la misma que teníamos que demostrar (como ya hemos visto al principio). Notemos pero, que si antisimetrizamos los índices μ y ν definiendo

$$G^{[\mu\nu]} := \frac{G^{\mu\nu} - G^{\nu\mu}}{2} \tag{7}$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left[G^{[\mu\nu]}, G^{\rho\sigma}\right] &= \frac{i}{2}\left(g^{\nu\rho}G^{\mu\sigma} + g^{\mu\rho}G^{\sigma\nu} - g^{\nu\sigma}G^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}G^{\rho\nu} - g^{\mu\rho}G^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}G^{\sigma\mu} + g^{\mu\sigma}G^{\nu\rho} + g^{\nu\sigma}G^{\rho\mu}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left[g^{\nu\rho}\left(G^{\mu\sigma} - G^{\sigma\mu}\right) - g^{\mu\rho}\left(G^{\nu\sigma} - G^{\sigma\nu}\right) - g^{\nu\sigma}\left(G^{\mu\rho} - G^{\rho\mu}\right) + g^{\mu\sigma}\left(G^{\nu\rho} - G^{\rho\nu}\right)\right] \\
&= i\left(g^{\nu\rho}G^{[\mu\sigma]} - g^{\mu\rho}G^{[\nu\sigma]} - g^{\nu\sigma}G^{[\mu\rho]} + g^{\mu\sigma}G^{[\nu\rho]}\right)
\end{aligned}
$$

Y, antisimetrizando ahora también los indices ρ, σ obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left[G^{[\mu\nu]}, G^{[\rho\sigma]}\right] &= \frac{i}{2}\left(g^{\nu\rho}G^{[\mu\sigma]} - g^{\mu\rho}G^{[\nu\sigma]} - g^{\nu\sigma}G^{[\mu\rho]} + g^{\mu\sigma}G^{[\nu\rho]} - g^{\nu\sigma}G^{[\mu\rho]} + g^{\mu\sigma}G^{[\nu\rho]} + g^{\nu\rho}G^{[\mu\sigma]} - g^{\mu\rho}G^{[\nu\sigma]}\right) \\
&= i\left(g^{\nu\rho}G^{[\mu\sigma]} - g^{\mu\rho}G^{[\nu\sigma]} - g^{\nu\sigma}G^{[\mu\rho]} + g^{\mu\sigma}G^{[\nu\rho]}\right)
\end{aligned}
$$

Siendo esta otra demostración de que los generadores de las transformaciones de Lorentz no son $G^{\mu\nu}$ sino

$$
G^{[\mu\nu]} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{8}
$$

2. Calcular las transformaciones bajo las siguientes transformaciones de Lorentz.

a. Boost en la dirección z.

Aunque Javier ya resolvió este apartado, vamos a repetirlo, bajo la transformación Λ tenemos

$$
S[\Lambda] = e^{-i\eta\frac{\sigma^{03}}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\eta\sigma^{03})^k}{2^k k!} \tag{9}
$$

Vamos a calcular las potencias de $-i\sigma^{03} = \frac{1}{2}\left[\gamma^0, \gamma^3\right]$

$$
-i\sigma^{03} = \frac{1}{2}(\gamma^0\gamma^3 - \gamma^3\gamma^0) = \gamma^0\gamma^3, \qquad (-i\sigma^{03})^2 = \gamma^0\gamma^3\gamma^0\gamma^3 = -\gamma^0\gamma^0\gamma^3\gamma^3 = 1
$$

Por lo tanto

$$
(-i\sigma^{03})^{2k} = 1, \qquad (-i\sigma^{03})^{2k+1} = -i\sigma^{03} \tag{10}
$$

Sustituyendo a la ecuación (9)

$$
\begin{aligned}
S[\Lambda] &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\eta\sigma^{03})^k}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\eta\sigma^{03})^{2k}}{2^{2k}(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\eta\sigma^{03})^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{\eta}{2}\right)^{2k} - i\sigma^{03}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\left(\frac{\eta}{2}\right)^{2k+1} = \cosh\frac{\eta}{2} - i\sigma^{03}\sinh\frac{\eta}{2} \\
&= \cosh\frac{\eta}{2} + \gamma^0\gamma^3\sinh\frac{\eta}{2}
\end{aligned}
$$

b. Rotación en el eje y.

$$
S[\Lambda] = e^{-i\theta\frac{\sigma^{31}}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\eta\sigma^{31})^k}{2^k k!} \tag{11}
$$

Repitamos el mismo proceso para $-i\sigma^{31}$:

$$
-i\sigma^{31} = \frac{1}{2}(\gamma^3\gamma^1 - \gamma^1\gamma^3) = \gamma^3\gamma^1, \qquad (-i\sigma^{31})^2 = \gamma^3\gamma^1\gamma^3\gamma^1 = -\gamma^3\gamma^3\gamma^1\gamma^1 = -1
$$

Esto implica que

$$
(-i\sigma^{31})^{2k} = (-1)^k, \qquad (-i\sigma^{31})^{2k+1} = (-1)^k(-i\sigma^{31}) \tag{12}
$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned}
S[\Lambda] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\theta\sigma^{31})^k}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\theta\sigma^{31})^{2k}}{2^{2k}(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\theta\sigma^{31})^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2k} - i\sigma^{31} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2k+1} = \cos\frac{\theta}{2} - i\sigma^{31} \sin\frac{\theta}{2} \\
&= \cos\frac{\theta}{2} + \gamma^3\gamma^1 \sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

c. Rotación en el eje z.

Y finalmente, volvemos a repetir los mismos cálculos para σ^{12}

$$S[\Lambda] = e^{-i\phi\frac{\sigma^{12}}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\phi\sigma^{12})^k}{2^k k!} \tag{13}$$

$$-i\sigma^{12} = \frac{1}{2}(\gamma^1\gamma^2 - \gamma^2\gamma^1) = \gamma^1\gamma^2, \qquad (-i\sigma^{12})^2 = \gamma^1\gamma^2\gamma^1\gamma^2 = -\gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^2 = -1$$

Esto implica que

$$(-i\sigma^{12})^{2k} = (-1)^k, \qquad (-i\sigma^{12})^{2k+1} = (-1)^k(-i\sigma^{12}) \tag{14}$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned}
S[\Lambda] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\phi\sigma^{12})^k}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\phi\sigma^{12})^{2k}}{2^{2k}(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\phi\sigma^{12})^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k} - i\sigma^{12} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k+1} = \cos\frac{\phi}{2} - i\sigma^{12} \sin\frac{\phi}{2} \\
&= \cos\frac{\phi}{2} + \gamma^1\gamma^2 \sin\frac{\phi}{2}
\end{aligned}$$